

## Parabeldiskussionen

(ohne Ableitungen)

16 Musterbeispiele

16 Trainingsaufgaben

Datei Nr. 13024

Stand 14. Februar 2014

Friedrich Buckel

## Vorwort

Um die Texte nicht zu lange werden zu lassen habe ich das Thema „Parabeln“ in einige Teilbereiche gegliedert. Dazu gibt es dann noch zusätzliche Texte mit Aufgabensammlungen.

### Inhaltsübersicht zu den „Parabeltexten“

18020	<b>Parabeln 1</b>	<b>Normalparabeln und gestreckte Parabeln.</b> <b>Zeichnen dieser Parabeln,</b>  <b>Aufstellen der Scheitelgleichung.</b>
18021		Lösungen zu den Aufgaben aus 18020.
18022		Weitere Übungen zu 18020.
18023	<b>Parabeln 2</b>	<b>Berechnung des Scheitels einer Parabel in Normalform.</b> <b>Quadratische Ergänzung und Scheitelformel</b> <b>Schnittpunkte mit der x-Achse und der y-Achse.</b> <b>Extremwertaufgaben.</b>
18024	Parabeln 3	Aufgaben: Parabeldiskussionen (ohne Ableitungen) <b>(Dieser Text)</b>
18025	Parabeln 4	Aufgaben: Weitere Parabeldiskussionen
18026	<b>Parabeln 5</b>	<b>Aufstellen von Parabelgleichungen wenn</b> <b>Scheitel und 1 Punkt gegeben sind,</b> <b>3 Punkte gegeben sind, oder wenn</b> <b>2 Nullstellen und ein weiterer Punkt gegeben sind.</b>
18027	<b>Parabeln 6</b>	<b>Abbildung (mit Abbildungsgleichungen) durch</b> <b>Verschiebungen, Streckungen, Spiegelungen</b>
18028	<b>Parabeln 7</b>	<b>Schnitt von Parabeln mit Geraden oder Parabeln.</b> <b>Tangenten an Parabeln</b>
18029	<b>Parabeln 8</b>	<b>Zusammenstellung aller Grundaufgaben zu Parabeln</b> <b>(kompakt)</b>
18030		Lösungen zu den Aufgaben aus 18029
18035		Extremwertaufgaben zu quadratischen Funktionen

Als grundlegendes Hilfsmittel wird das Kurvenzeichenprogramm MatheGrafix verwendet, das man unter [www.mathegrafix.de](http://www.mathegrafix.de) in der neuesten Version beziehen kann.

Weil es bei diesem Thema um grundlegende mathematische Fähigkeiten und Methoden geht, wurde darauf verzichtet, Grafikrechner oder CAS-Rechner mit einzubeziehen.

## INHALT

### 16 Musterbeispiele

1.  $y = x^2 - 4x + 3$

6

2.  $y = x^2 + 3x + 5$

7

3.  $y = -x^2 + 2x + 8$

8

4.  $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$

9

5.  $y = -(x - 2)^2 + 8$

10

6.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8$

11

7.  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x - 3$

12

8.  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

13

9.  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

14

10.  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$

15

11.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

16

12.  $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2x + \frac{8}{3}$

17

13.  $y = \frac{1}{4}(x + 3)^2 - \frac{5}{4}$

18

14.  $y = 3(x - 1)^2 - 12$

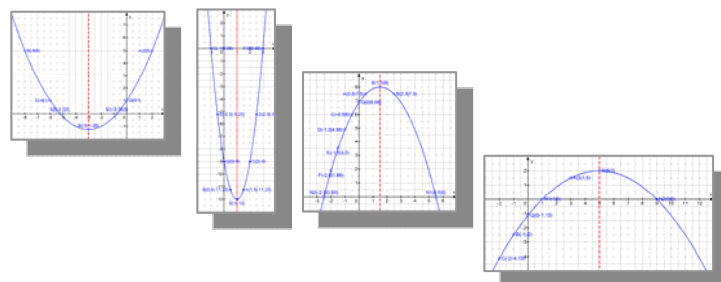
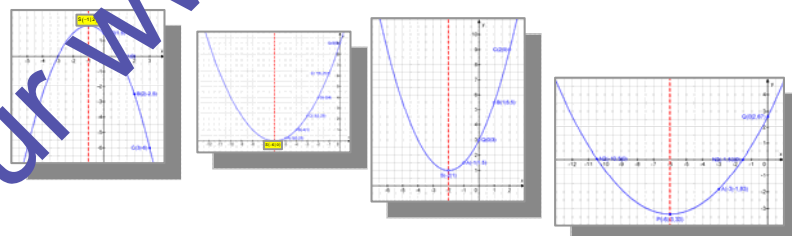
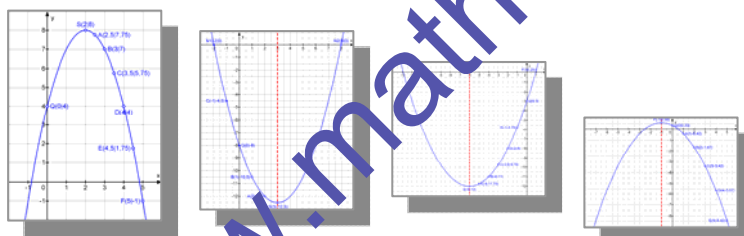
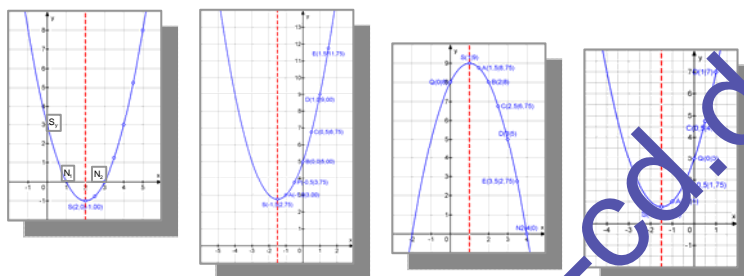
19

15.  $y = -\frac{1}{4}(x - \frac{3}{2})^2 + 8$

20

16.  $y = -\frac{1}{8}(x - 5)^2 + 2$

21



## 16 Trainingsaufgaben: 17 bis 32 Seite 21

Dort finden Sie die Lösungen:

L17  $y = x^2 + 7x + 6$

23

L18  $y = x^2 - \frac{5}{2} \cdot x$

24

L19  $y = -x^2 + 6x - 2$

25

L20  $y = -x^2 - \frac{9}{4}x + 5$

26

L21  $y = (x-1)^2 - \frac{3}{2}$

27

L22  $y = (x + \frac{7}{2})^2 + 1$

28

L23  $y = -(x+4)^2 + 8$

29

L24  $y = -(x - \frac{5}{2})^2$

30

L25  $y = 4x^2 - 8x - 8$

31

L26  $y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

32

L27  $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

33

L28  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{13}{2}$

34

L29  $y = \frac{1}{2}(x+5)^2 - \frac{9}{2}$

35

L30  $y = -2(x-2)^2 + 8$

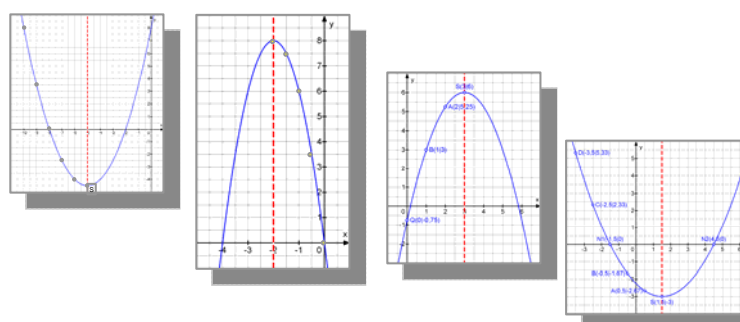
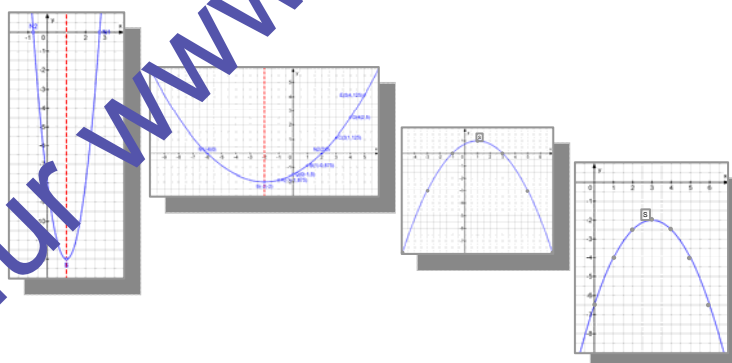
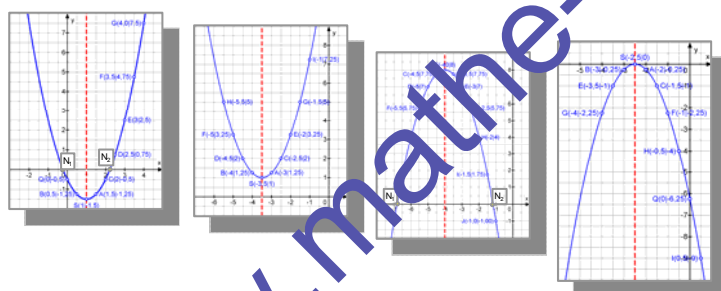
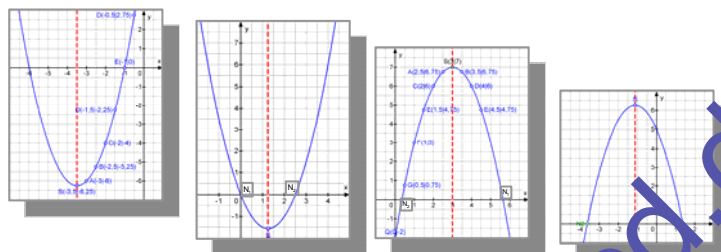
36

L31  $y = -\frac{3}{4}(x-3)^2 + 6$

37

L32  $y = \frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2 - 3$

38



Weitere solche Aufgaben befinden sich im Text 18024

## Parabeldiskussionen

Wenn man alles über Parabeln gelernt hat, bekommt man oftmals Aufgaben, in denen es heißt, dass man alle Parabeleigenschaften zusammenstellen soll, die man herausfindet.

**Dazu gehören diese Fragestellungen:**

- a) Wo liegt der Parabelscheitel?
- b) Wohin ist sie geöffnet, und wie ist sie gestreckt?
- c) Wo schneidet die Parabel die Koordinatenachsen?
- d) Welche Wertmenge hat sie?

**Methoden:**

- a) Ist die **Parabel in der Scheitelform**  $y = k \cdot (x - x_s)^2 + y_s$  gegeben, kann man den Scheitel  $S(x_s | y_s)$  direkt ablesen. Ist sie in der Normalform  $y = ax^2 + bx + c$  gegeben, bestimmt man den **Scheitel** entweder mit quadratischer Ergänzung oder über die Scheitelformel. Siehe vorne in diesem Text.  
Die Parallele zur y-Achse durch S ist die **Parabelachse**. Die hat also die Gleichung  $x = x_s$ . Die Parabel ist **symmetrisch** zur Parabelachse.
- b) Ist k bzw. a eine positive Zahl, dann ist die Parabel **nach oben geöffnet**.  
Ist k bzw. a negativ, dann ist sie **nach unten geöffnet**.  
Für  $k = \pm 1$  bzw.  $a = -1$ , dann ist die Parabel nicht gestreckt, also eine **Normalparabel**. Sonst ist sie gestreckt. (a bzw. k können nie 0 sein, weil dann keine Parabel mehr vorliegt.)
- c) **Schnittpunkte mit der x-Achse** erhält man über  $y = 0$ . Dies führt zu einer quadratischen Gleichung. Siehe vorne im Text.  
Den **Schnittpunkt mit der y-Achse** erhält man über  $x = 0$ . In der Normalform  $y = ax^2 + bx + c$  folgt daraus  $y = c$ . Diese Zahl (ohne x) nennt man Absolutglied. Das Absolutglied stellt demnach den y-Achsenabschnitt dar:  $S_y(0 | c)$ .
- d) Die **Wertmenge** ist die Menge der bei der Parabel vorkommenden y-Koordinaten. Ist die Parabel nach oben geöffnet, kommen alle y-Werte vor, die mindestens so groß sind wie die y-Koordinate des Scheitels:  $y \geq y_s$  bzw.  $W = [y_s; \infty[$ .  
Ist die Parabel nach unten geöffnet, kommen alle y-Werte vor, die höchstens so groß sind wie die y-Koordinate des Scheitels:  $y \leq y_s$  bzw.  $W = ]-\infty; y_s]$ .

## 1 Musterbeispiele

### Beispiel 1:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

### Normalparabel

#### 1. Schnittpunkt mit der y-Achse:

Zu  $x = 0$  gehört  $y = 3$ , also ist  $S_y(0|3)$  der gesuchte Schnittpunkt.

Hinweis: Sehr oft ist die Parabel durch eine quadratische Funktion  $f$  gegeben.

$f(x) = x^2 - 4x + 3$  stellt dann die Berechnungsvorschrift für die Funktionswerte dar, die man als y-Koordinaten verwendet.

Für den Schnittpunkt mit der y-Achse berechnet man dann  $f(0) = 3$ .

#### 2. Schnittpunkte mit der x-Achse: (Nullstellen)

Für die Punkte auf der x-Achse gilt  $y = 0$ . Dies führt zur Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Lösung mit der Mitternachtsformel  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ :

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

(Die Nullstellen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse)

Ergebnis: Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind  $N_1(1|0)$  und  $N_2(3|0)$ .

#### 3. Parabelscheitel:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

Eingesetzt in die Parabelgleichung:

$$y_s = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Ergebnis:  $S(2|-1)$

Symmetrieachse:  $x = 2$ .

#### 4. Wertmenge: $W = [-1; \infty [$

(Menge der vorkommenden y-Koordinaten bzw. Funktionswerte).

