Parabeln

Teil 3

Parabeldiskussionen

(ohne Ableitungen)

16 Musterbeispiele

16 Trainingsaufgaben

Datei Nr. 18024

Stand 14. Februar 2014

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Um die Texte nicht zu lange werden zu lassen habe ich das Thema „Parabeln“ in einige Teilbereiche gegliedert. Dazu gibt es dann noch zusätzliche Texte mit Aufgabensammlungen.

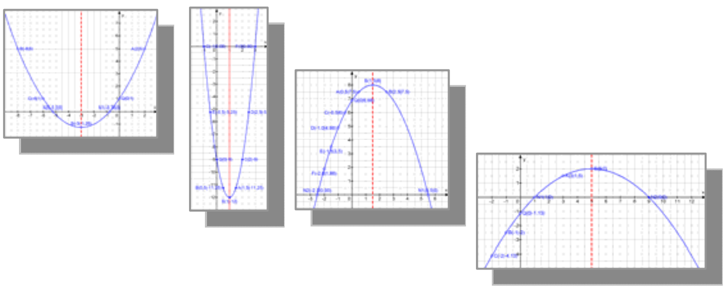
Inhaltsübersicht zu den „Parabeltexten“

Als grundlegendes Hilfsmittel wird das Kurvenzeichenprogramm MatheGrafix verwendet, das man unter www.mathegrafix.de in der neuesten Version beziehen kann.

Weil es bei diesem Thema um grundlegende mathematische Fähigkeiten und Methoden geht, wurde darauf verzichtet, Grafikrechner oder CAS-Rechner mit einzubeziehen.

INHALT

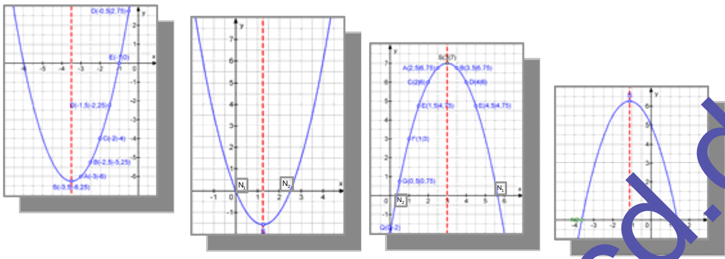
16 Musterbeispiele



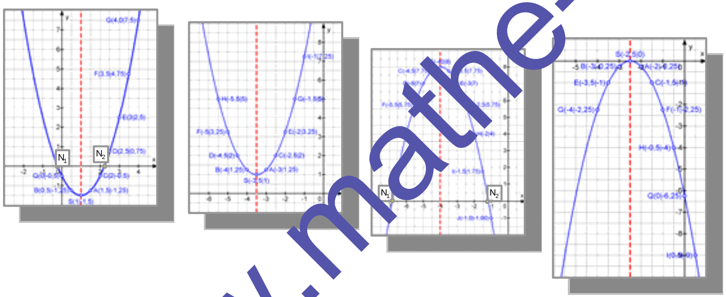
16 Trainingsaufgaben: 17 bis 32 Seite 21

Dort finden Sie die Lösungen:

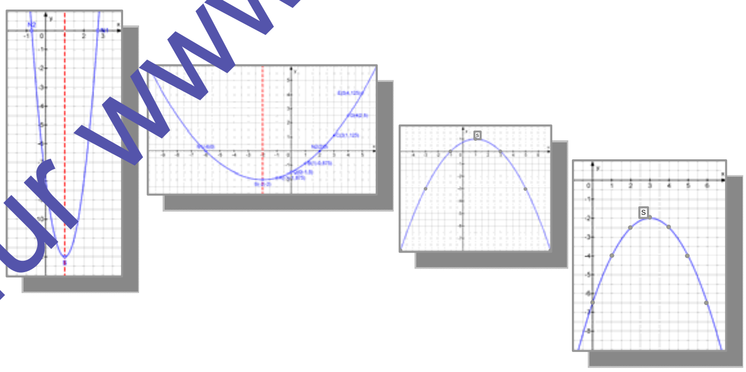
L17	$y = x^2 + 7x + 6$	23
L18	$y = x^2 - \frac{5}{2} \cdot x$	24
L19	$y = -x^2 + 6x - 2$	25
L20	$y = -x^2 - \frac{9}{4}x + 5$	26



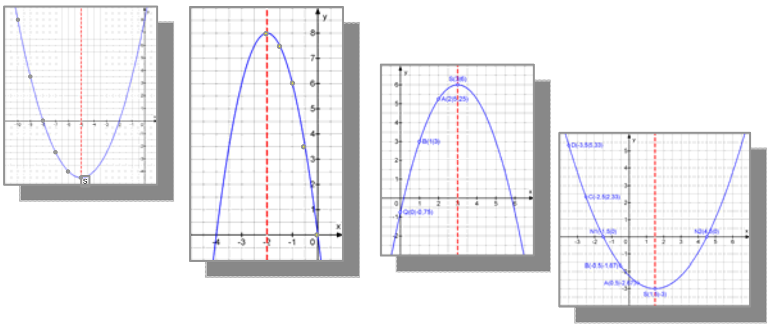
L21	$y = (x-1)^2 - \frac{3}{2}$	27
L22	$y = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + 1$	28
L23	$y = -(x+4)^2 + 8$	29
L24	$y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$	30



L25	$y = 4x^2 - 8x - 8$	31
L26	$y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$	32
L27	$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$	33
L28	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{13}{2}$	34



L29	$y = \frac{1}{2}(x+5)^2 - \frac{9}{2}$	35
L30	$y = -2(x+2)^2 + 8$	36
L31	$y = -\frac{3}{4}(x-3)^2 + 6$	37
L32	$y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3$	38



Weitere solche Aufgaben befinden sich im Text 18024

Parabeldiskussionen

Wenn man alles über Parabeln gelernt hat, bekommt man oftmals Aufgaben, in denen es heißt, dass man alle Parabeleigenschaften zusammenstellen soll, die man herausfindet.

Dazu gehören diese Fragestellungen:

a) Wo liegt der Parabelscheitel?
b) Wohin ist sie geöffnet, und wie ist sie gestreckt?
c) Wo schneidet die Parabel die Koordinatenachsen?
d) Welche Wertmenge hat sie?

Methoden:

a) Ist die **Parabel in der Scheitelform** $y = k \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ gegeben, kann man den Scheitel $S(x_S \mid y_S)$ direkt ablesen. Ist sie in der Normalform $y = ax^2 + bx + c$ gegeben, bestimmt man den **Scheitel** entweder mit quadratischer Ergänzung oder über die Scheitelformel. Siehe vorne in diesem Text.
Die Parallele zur y-Achse durch S ist die **Parabelachse**. Die hat also die Gleichung $x = x_S$. Die Parabel ist **symmetrisch** zur Parabelachse.

b) Ist k bzw. a eine positive Zahl, dann ist die Parabel **nach oben geöffnet**.
Ist k bzw. a negativ, dann ist sie **nach unten geöffnet**.
Für $k = \pm 1$ bzw. $a = \pm 1$, dann ist die Parabel nicht gestreckt, also eine **Normalparabel**. Sonst ist sie gestreckt. (a bzw. k können nie 0 sein, weil dann keine Parabel mehr vorliegt.)

c) **Schnittpunkte mit der x-Achse** erhält man über $\boxed{y = 0}$. Dies führt zu einer quadratischen Gleichung. Siehe vorne im Text.

Den **Schnittpunkt mit der y-Achse** erhält man über $\boxed{x = 0}$. In der Normalform $y = ax^2 + bx + c$ folgt daraus y = c. Diese Zahl (ohne x) nennt man Absolutglied.
Das Absolutglied stellt demnach den y-Achsenabschnitt dar: $S_y(0 \mid c)$.

d) Die **Wertmenge** ist die Menge der bei der Parabel vorkommenden y-Koordinaten.
Ist die Parabel nach oben geöffnet, kommen alle y-Werte vor, die mindestens so groß sind wie die y-Koordinate des Scheitels: $y \geq y_S$ bzw. $W = [y_S ; \infty[$.
Ist die Parabel nach unten geöffnet, kommen alle y-Werte vor, die höchstens so groß sind wie die y-Koordinate des Scheitels: $y \leq y_S$ bzw. $W =]-\infty ; y_S]$.

1 Musterbeispiele

Beispiel 1: $y = x^2 - 4x + 3$ Normalparabel

1. **Schnittpunkt mit der y-Achse:**

   Zu $x = 0$ gehört $y = 3$, also ist $S_y(0\,|\,3)$ der gesuchte Schnittpunkt.

   Hinweis: Sehr oft ist die Parabel durch eine quadratische Funktion f gegeben. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ stellt dann die Berechnungsvorschrift für die Funktionswerte dar, die man als y-Koordinaten verwendet. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse berechnet man dann $f(0) = 3$.

2. **Schnittpunkte mit der x-Achse: (Nullstellen)**

   Für die Punkte auf der x-Achse gilt y = 0. Dies führt zur Gleichung

   $$x^2 - 4x + 3 = 0$$

   Lösung mit der Mitternachtsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

   $$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

   (Die Nullstellen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse)

   Ergebnis: Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $N_1(1\,|\,0)$ und $N_2(3\,|\,0)$.

3. **Parabelscheitel:**

   $$\boxed{x_S = -\frac{b}{2a}} = -\frac{-4}{2} = 2$$

   Eingesetzt in die Parabelgleichung:

   $y_S = 4 - 8 + 3 = -1$.

   Ergebnis: $S(2\,|\,-1)$

   Symmetrieachse: x = 2.

4. **Wertmenge:** $W = [\,-1; \infty\,[$

   (Menge der vorkommenden y-Koordinaten bzw. Funktionswerte).